Clasa	.	a XII-a

Concursul de matematică "Marcel Roşculeţ"
Ediţia a XII-a, 17 mai 2025

Partea I Subiectele 1-15 au un singur răspuns corect.
În tabelul primit se marchează cu X răspunsul considerat corect şi cu — celelalte răspunsuri.

Subiectul 1. Mulţimea valorilor reale ale lui x pentru care $4-x<\frac{3}{x}$ este
a) $(-\infty,1)\cup(3,\infty)$; **b)** $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(3,\infty)$; **c)** $(1,3)$; **d)** $(0,1)\cup(1,\infty)$; **e)** $(0,\infty)$; **f)** $(0,1)\cup(3,\infty)$.

Subiectul 2. Dacă $\log_{20}125=c$, atunci $b=\log_{16}10$ este
a) $\frac{a}{2(3-a)}$; **b)** $\frac{a}{a+3}$; **c)** $\frac{2(3-a)}{a}$; **d)** $\frac{a}{2(3+a)}$; **e)** $\frac{a}{3-a}$; **f)** $\frac{a}{3(2-a)}$.

Subiectul 3. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $2^x+6\cdot 2^{-x}<5$.
a) $(\log_3 2,\infty)$; **b)** $(1,3)$; **c)** $(1,\log_2 3)$; **d)** $(\log_2 3,\infty)$; **e)** $(1,2)$; **f)** $(-\infty,\log_2 3)$.

Subiectul 4. Fie a şi b numere reale astfel încât a, 2, b sunt în progresie aritmetică (în această ordine) şi $\dfrac{1}{a}$, 2, $\dfrac{1}{b}$ sunt în progresie geometrică (în această ordine).
Atunci $S=(1+a)(1+b)$ este :
a) 3; **b)** $\dfrac{19}{4}$; **c)** 5; **d)** $\dfrac{21}{4}$; **e)** $\dfrac{17}{2}$; **f)** $\dfrac{19}{2}$.

Subiectul 5. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\min\{t^2-2t+1 \mid t\le x\}, & \text{dacă } x\le 1\\ \max\{1-\sqrt{t}\mid t\ge x\}, & \text{dacă } x>1\end{cases}$. Atunci
a) f nu este bijectivă; **b)** f nu este injectivă; **c)** f este crescătoare; **d)** f nu este surjectivă;
e) $f^{-1}(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & \text{dacă } x<0\\ 1-\sqrt{x}, & \text{dacă } x\ge 0\end{cases}$; **f)** $f^{-1}(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & \text{dacă } x<1\\ 1-\sqrt{x}, & \text{dacă } x\ge 1\end{cases}$.

Subiectul 6. Un cod PIN este de forma $abcd$ cu patru cifre alese din mulţimea $\{1,3,5,7,9\}$. Notăm cu n numărul codurilor PIN formate cu patru cifre distincte şi cu m numărul codurilor PIN care au exact două cifre identice. Atunci:
a) $n=120, m=360$; **b)** $n=5^4, m=5^3$; **c)** $n=120, m=60$; **d)** $n=5^4, m=4^3$;
e) $n=240, m=960$; **f)** $n=120, m=240$.

Subiectul 7. Să se determine valorile parametrului real m astfel încât
$\ln(x^2+y^2-2x-y+m)$ există pentru orice numere reale x şi y.
a) $m\in(0,\infty)$; **b)** $m\in\left(\frac{5}{4},\infty\right)$; **c)** $m\in(2,\infty)$; **d)** $m=\frac{5}{4}$; **e)** $m\in\left(0,\frac{5}{4}\right)$; **f)** $m\in\left[\frac{5}{4},\infty\right)$.

Subiectul 8. O funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisface relaţia $f(x)+f(y)=f(x+y)-xy-1$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$. Dacă $f(1)=1$, să se determine $f(n)$ pentru $n\ge 2$ întreg.
a) 2^n; **b)** $2n$; **c)** $\dfrac{n^2+n}{2}$; **d)** $\dfrac{n^2+3n+2}{2}$; **e)** $4(n-1)$; **f)** $\dfrac{n^2+3n-2}{2}$.

Subiectul 9. Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$, nu toate nule, astfel încât
$(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+3)(a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c)\in\mathbb{Z}$.
a) $a=1,b=1,c=1$; **b)** $a=1,b=2,c=4$; **c)** $a=1,b=-2,c=4$; **d)** $a=2b,c=-7b,b\in\mathbb{Z}^*$;
e) $a=2,b=-3,c=1$; **f)** $a=2b,c=-4b,b\in\mathbb{Z}^*$.

Subiectul 10. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (3x^2 - 2x)\mathrm{e}^x$. Derivatele funcţiei f sunt de forma $f^{(n)}(x) = (a_n x^2 + b_n x + c_n)\,\mathrm{e}^x$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Atunci:
a) $a_{n+1} = 3, b_{n+1} = b_n + 6, c_{n+1} = c_n + 6n - 2$; **b)** $a_{n+1} = a_n + 3, b_{n+1} = b_n + 6, c_{n+1} = c_n + 6n$;
c) $a_{n+1} = 3(n+1), b_{n+1} = b_n + 6, c_{n+1} = c_n + 6n - 2$; **d)** $a_{n+1} = 3, b_{n+1} = b_n + 6, c_{n+1} = c_n + 4n$;
e) $a_{n+1} = 3, b_{n+1} = b_n + 3, c_{n+1} = c_n + 6n - 2$; **f)** $a_{n+1} = 3n, b_{n+1} = b_n + 3, c_{n+1} = c_n + 6n - 2$.

Subiectul 11. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$. Suma $S = A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{2025}$ este:
a) $\dfrac{3^{4052}}{8}A$; **b)** $\dfrac{3^{4052}-1}{8}A$; **c)** $\dfrac{3^{4050}-1}{8}A$; **d)** $\dfrac{3^{4052}-1}{4}A$; **e)** $\dfrac{9^{2025}-1}{4}A$; **f)** $\dfrac{9^{2025}-1}{9}A$.

Subiectul 12. Fie sistemul $\begin{cases} x + 2y - z + 3t &= 5 \\ 4x + y + az + t &= c \\ 2x - 3y + z + bt &= 2 \end{cases}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Să se calculeze $S = a + b + c$ astfel încât sistemul să fie compatibil dublu nedeterminat.
a) 6; **b)** 18; **c)** -6; **d)** 10; **e)** 16; **f)** 8.

Subiectul 13. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\cos^2(xt)}{1 + \mathrm{e}^{-t}}\mathrm{d}t$. Dacă $\ell = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ atunci:
a) nu există ℓ; **b)** $\ell = \infty$; **c)** $\ell = 1$; **d)** $\ell = \dfrac{1}{2}$; **e)** $\ell = 0$; **f)** $\ell = 2$.

Subiectul 14. Să se calculeze aria mulţimii mărginite, situată între graficele funcţiilor $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ şi $g(x) = \ln^2 x$.
a) $\mathrm{e} + 1$; **b)** $3 - \mathrm{e}$; **c)** $\mathrm{e} - 1$; **d)** $2\mathrm{e} + 1$; **e)** $\mathrm{e} + 3$; **f)** $2\mathrm{e} - 1$.

Subiectul 15. Fie polinomul $P = X^4$, $P \in \mathbb{R}[X]$. Restul împărţirii lui P la polinomul $X^2 - 2X - 8$ este:
a) $32X - 128$; **b)** $32X + 64$; **c)** $16X + 64$; **d)** $40X + 96$; **e)** $40X - 96$; **f)** $32X - 64$.

Partea a II-a Se redactează soluţia subiectului 16.

Subiectul 16. Fie funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\{t\}^2 + 1}$,
unde $\{t\}$ este partea fracţionară, adică $\{t\} = t - [t] = t - n$ pentru $n \le t < n + 1, n \in \mathbb{Z}$.
i) Calculaţi $f(x)$ pentru $x \in [0, 1)$;
ii) Calculaţi $f(x)$ pentru $x \in [0, \infty)$;
iii) Demonstraţi că funcţia $g(x) = f(x + 1) - f(x)$ este constantă pe intervalul $[0, \infty)$;
iv) Studiaţi continuitatea şi derivabilitatea funcţiei f pe intervalul $[0, \infty)$.