Clasa	a XII-a

Concursul de matematică "Marcel Roşculeţ"
Ediţia a XI-a, 18 mai 2024

Partea I Subiectele 1-15 au un singur răspuns corect.
În tabelul primit se marchează cu X răspunsul considerat corect şi cu — celelalte răspunsuri.

Subiectul 1. Calculaţi $\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
a) $\frac{1}{2}$; **b)** $-\frac{1}{2}$; **c)** 1; **d)** 2; **e)** 4; **f)** -2.

Subiectul 2. Se consideră ecuaţia $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=m$, unde $m\in\mathbb{R}$. Mulţimea M a valorilor lui m pentru care ecuaţia are soluţie unică $x\in\mathbb{R}$ este
a) $(-\infty,2)$; **b)** $(1,\infty)$; **c)** $(2,\infty)$; **d)** $[2,\infty)$; **e)** $(-\infty,2]$; **f)** $\{2\}$.

Subiectul 3. Se consideră suma $S_n=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$, unde n este număr natural, $n\geq 1$. Să se determine cel mai mic n pentru care $S_n\geq 100$.
a) 10201; **b)** 100; **c)** 1000; **d)** 10200; **e)** 101; **f)** 1001.

Subiectul 4. Fie $x,y,z\in\mathbb{C}$ astfel încât $|x|=|y|=|z|$ şi $xyz=xy+yz+zx=1$. Valoarea sumei $x+y+z$ este:
a) -1; **b)** 0; **c)** 1; **d)** i; **e)** $-$i; **f)** 2.

Subiectul 5. Dacă $3^x=7^y=441$, atunci $S=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ este
a) $\frac{1}{\log_3 21}+\frac{1}{\log_7 21}$; **b)** $\frac{1}{2}$; **c)** $4+\log_3 7+\log_7 3$; **d)** 2; **e)** $2+\log_3 7+\log_7 3$; **f)** 21.

Subiectul 6. Un număr natural de forma $\overline{abcba}$ se numeşte palindrom. Să se determine numărul palindroamelor $\overline{abcba}$ formate din 5 cifre, unde $a,b,c\in\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ şi a,b,c nu sunt neapărat distincte.
a) 343; **b)** 336; **c)** 448; **d)** 810; **e)** 900; **f)** 512.

Subiectul 7. Soluţiile ecuaţiei $2^{3x}+6=3\cdot 2^{2x}+2^{x+1}$ sunt
a) $\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$; **b)** $\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right\}$; **c)** $\{\log_2 3,\log_2 4\}$; **d)** $\{-1,1\}$; **e)** $\{1,2\}$; **f)** $\left\{\frac{1}{2},\log_2 3\right\}$.

Subiectul 8. Fie $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Aflaţi toate matricele $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), B\neq 0_2$, astfel încât $A\cdot B=0_2$.
a) $\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\-\alpha&-\beta\end{pmatrix}, \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$; **b)** $\begin{pmatrix}2\alpha&2\beta\\-\alpha&-\beta\end{pmatrix}, \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$; **c)** $\begin{pmatrix}-4&-4\\2&2\end{pmatrix}$;
d) $\begin{pmatrix}-2\alpha&-2\beta\\\alpha&\beta\end{pmatrix}, \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\alpha^2+\beta^2>0$; **e)** $\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$; **f)** $\begin{pmatrix}2&2\\-2&-2\end{pmatrix}$.

Subiectul 9. Fie $f:D\to\mathbb{R}$, $f=\frac{x^2-9}{x-4}$, unde $D\subset\mathbb{R}$ este domeniul maxim de definiţie. Asimptotele funcţiei f sunt
a) $y=1$ spre $\pm\infty$ şi $x=4$; **b)** $y=x+4$ spre $\pm\infty$ şi $x=4$; **c)** $y=x$ spre ∞ şi $x=4$;
d) $y=x-4$ spre ∞ şi $x=4$; **e)** $y=x-4$ spre $\pm\infty$ şi $x=4$; **f)** $y=x+4$ spre $\pm\infty$ şi $x=\pm 2$.

Subiectul 10. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x+3)^5$. Atunci $f^{(4)}(3)$ este
a) $5!$; **b)** 12; **c)** $4!$; **d)** 6^{20}; **e)** $6!$; **f)** 6^5.

Subiectul 11. Aflaţi $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât mulţimea valorilor funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + \alpha x + 1}{x^2 + x + 1}$, să fie un interval de lungime 4.
a) $\alpha \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$; **b)** $\alpha \in \{-1, 2\}$; **c)** $\alpha \in [-2, 2]$; **d)** $\alpha = 4$; **e)** $\alpha \in \left\{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$; **f)** $\alpha \in \{-2, 4\}$.

Subiectul 12. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = ax^2 + bx + c$, $\forall x \in \mathbb{R}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Dacă $f(k) = \dfrac{1}{k}, \forall k = \overline{1,3}$, calculaţi $f(4)$.
a) 0; **b)** $\dfrac{1}{2}$; **c)** $\dfrac{2}{5}$; **d)** $\dfrac{1}{4}$; **e)** $\dfrac{1}{6}$; **f)** $-\dfrac{1}{6}$.

Subiectul 13. Calculaţi $\lim\limits_{x \to \infty} \displaystyle\int_0^x (3t + 5)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.
a) 3; **b)** 5; **c)** 8; **d)** 0; **e)** 2; **f)** ∞.

Subiectul 14. Valoarea integralei $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$ este
a) $\ln(\mathrm{e}^2 + 1) - 1$; **b)** 2; **c)** $\ln(\mathrm{e}^2 + 1) + 1$; **d)** 0; **e)** $2 + \ln(\mathrm{e}^2 + 1)$; **f)** 1.

Subiectul 15. Să se determine parametrul $m \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul $P \in \mathbb{R}[X]$, $P = X^5 - mX^4 + mX - 1$ este divizibil cu $(X-1)^2$.
a) $\dfrac{5}{2}$; **b)** 1; **c)** $\dfrac{5}{4}$; **d)** $\dfrac{4}{5}$; **e)** $\dfrac{5}{3}$; **f)** $\dfrac{3}{5}$.

Partea a II-a Participanţii de clasa a XII-a redactează soluţia subiectulului 17.

Subiectul 17. Fie funcţiile $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)$, şi $g : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = |f(x)|$.
i) Determinaţi punctele de extrem local ale funcţiei $f(x)$. Calculaţi $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x$.
ii) Determinaţi punctele de maxim local x_1 şi x_2 ale funcţiei $g(x)$. Demonstraţi că

$$\frac{g(x_1) + g(x_2)}{2} < \int_0^2 g(x)\mathrm{d}x < g(x_1) + g(x_2).$$