Clasa	a XI-a

Concursul de matematică "Marcel Roşculeţ"

Ediţia a XI-a, 18 mai 2024

Partea I Subiectele 1-15 au un singur răspuns corect.
În tabelul primit se marchează cu X răspunsul considerat corect şi cu — celelalte răspunsuri.

Subiectul 1. Soluţiile ecuaţiei $2^{3x}+6=3\cdot 2^{2x}+2^{x+1}$ sunt
a) $\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$; **b)** $\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right\}$; **c)** $\{\log_2 3, \log_2 4\}$; **d)** $\{-1,1\}$; **e)** $\{1,2\}$; **f)** $\left\{\frac{1}{2},\log_2 3\right\}$.

Subiectul 2. Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Aflaţi toate matricele $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), B\neq 0_2$, astfel încât $A\cdot B=0_2$.
a) $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & -\beta \end{pmatrix}, \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$; **b)** $\begin{pmatrix} 2\alpha & 2\beta \\ -\alpha & -\beta \end{pmatrix}, \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$; **c)** $\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;
d) $\begin{pmatrix} -2\alpha & -2\beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}, \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}, \alpha^2+\beta^2>0$; **e)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; **f)** $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Subiectul 3. Fie $f:D\to\mathbb{R}$, $f=\dfrac{x^2-9}{x-4}$, unde $D\subset\mathbb{R}$ este domeniul maxim de definiţie. Asimptotele funcţiei f sunt
a) $y=1$ spre $\pm\infty$ şi $x=4$; **b)** $y=x+4$ spre $\pm\infty$ şi $x=4$; **c)** $y=x$ spre ∞ şi $x=4$;
d) $y=x-4$ spre ∞ şi $x=4$; **e)** $y=x-4$ spre $\pm\infty$ şi $x=4$; **f)** $y=x+4$ spre $\pm\infty$ şi $x=\pm 2$.

Subiectul 4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x+3)^5$. Atunci $f^{(4)}(3)$ este
a) $5!$; **b)** 12; **c)** $4!$; **d)** 6^{20}; **e)** $6!$; **f)** 6^5.

Subiectul 5. Aflaţi $\alpha\in\mathbb{R}$ astfel încât mulţimea valorilor funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+\alpha x+1}{x^2+x+1}$, să fie un interval de lungime 4.
a) $\alpha\in\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right\}$; **b)** $\alpha\in\{-1,2\}$; **c)** $\alpha\in[-2,2]$; **d)** $\alpha=4$; **e)** $\alpha\in\left\{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\}$; **f)** $\alpha\in\{-2,4\}$.

Subiectul 6. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=ax^2+bx+c$, $\forall x\in\mathbb{R}$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$.
Dacă $f(k)=\dfrac{1}{k}, \forall k=\overline{1,3}$, calculaţi $f(4)$.
a) 0; **b)** $\dfrac{1}{2}$; **c)** $\dfrac{2}{5}$; **d)** $\dfrac{1}{4}$; **e)** $\dfrac{1}{6}$; **f)** $-\dfrac{1}{6}$.

Subiectul 7. Calculaţi $\left(\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
a) $\frac{1}{2}$; **b)** $-\frac{1}{2}$; **c)** 1; **d)** 2; **e)** 4; **f)** -2.

Subiectul 8. Se consideră ecuaţia $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=m$, unde $m\in\mathbb{R}$. Mulţimea M a valorilor lui m pentru care ecuaţia are soluţie unică $x\in\mathbb{R}$ este
a) $(-\infty,2)$; **b)** $(1,\infty)$; **c)** $(2,\infty)$; **d)** $[2,\infty)$; **e)** $(-\infty,2]$; **f)** $\{2\}$.

Subiectul 9. Se consideră suma $S_n=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$, unde n este număr natural, $n\geq 1$. Să se determine cel mai mic n pentru care $S_n\geq 100$.
a) 10201; **b)** 100; **c)** 1000; **d)** 10200; **e)** 101; **f)** 1001.

Subiectul 10. Fie $x, y, z \in \mathbb{C}$ astfel încât $|x| = |y| = |z|$ şi $xyz = xy + yz + zx = 1$. Valoarea sumei $x + y + z$ este:
a) -1; **b)** 0; **c)** 1; **d)** i; **e)** $-\mathrm{i}$; **f)** 2.

Subiectul 11. Dacă $3^x = 7^y = 441$, atunci $S = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ este
a) $\dfrac{1}{\log_3 21} + \dfrac{1}{\log_7 21}$; **b)** $\dfrac{1}{2}$; **c)** $4 + \log_3 7 + \log_7 3$; **d)** 2; **e)** $2 + \log_3 7 + \log_7 3$; **f)** 21.

Subiectul 12. Un număr natural de forma $\overline{abcba}$ se numeşte palindrom. Să se determine numărul palindroamelor $\overline{abcba}$ formate din 5 cifre, unde $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ şi a, b, c nu sunt neapărat distincte.
a) 343; **b)** 336; **c)** 448; **d)** 810; **e)** 900; **f)** 512.

Subiectul 13. Fie sistemul $\begin{cases} 3x - 4y + 2z &= 1, \\ x + ay + z &= 3, \\ 2x - 3y + 2z &= b. \end{cases}$ Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să fie compatibil nedeterminat.
a) $a = \frac{3}{2}, b = 6$; **b)** $a = \frac{3}{2}, b = -6$; **c)** $a = -\frac{3}{2}, b = 6$; **d)** $a = -3, b = 6$; **e)** $a = 3, b = -6$; **f)** $a = -\frac{3}{2}, b = -6$.

Subiectul 14. Inecuaţia $(x^2 - 1)(3x + 2) < 0$ are mulţimea soluţiilor
a) $\left(-1, -\frac{2}{3}\right)$; **b)** $(-\infty, -1)$; **c)** $(1, \infty)$; **d)** $(-\infty, -1) \cup \left(-\frac{2}{3}, 1\right)$; **e)** $\left(-\frac{2}{3}, 1\right)$; **f)** $\left(-1, -\frac{2}{3}\right) \cup (1, \infty)$.

Subiectul 15. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + ax + b, & x < 0 \\ 2 + \mathrm{e}^{-2x}, & x \geq 0 \end{cases}$.
Dacă f este derivabilă pe $\mathbb{R}$, atunci $a + b$ este
a) 0; **b)** $\frac{1}{3}$; **c)** 3; **d)** 4; **e)** 1; **f)** -1.

Partea a II-a **Participanţii de clasa a XI-a redactează soluţia subiectulului 16**.

Subiectul 16. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
i) Să se calculeze $\det(A)$.
ii) Să se arate că $A^{2n} = \dfrac{2^{2n} - 1}{3} A + \dfrac{2^{2n} + 2}{3} I_3$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
iii) Să se determine A^{-1}.